Dodatek F

Teoria optymalnego stopowania

§ F.1. Rozkład Dooba nadmartyngałów

W tym paragrafie będziemy rozpatrywać nadmartyngały, podmartyngały i procesy prognozowalne względem ustalonej filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$.

Twierdzenie 1 (O rozkładzie Dooba). *Każdy nadmartyngał* $(U_n)_{n=0}^{\infty}$ *ma jednoznaczne z dokładnością do równości p.n. przedstawienie*

$$U_n = M_n - A_n, \tag{1}$$

gdzie $(M_n)_{n=0}^{\infty}$ *jest martyngałem,* $(A_n)_{n=0}^{\infty}$ *— niemalejącym procesem prognozowalnym,* $A_0 = 0$.

D o w ó d. Najpierw zdefiniujemy proces (A_n). Niech $A_0 = 0$ i dla $n \geqslant 1$:

$$A_n = \sum_{k=1}^{n-1} [U_k - \mathcal{E}\,(U_{k+1} \mid \mathcal{F}_k)].$$

Oczywiście zmienna losowa A_n jest $\mathcal{F}_{n-1}$-mierzalna. Proces (A_n) jest niemalejący, bowiem wyrazy sumy po prawej stronie są nieujemne, jako że (U_n) jest nadmartyngałem.

Teraz nie mamy już wyboru — $M_0 = U_0$ i $M_n = U_n + A_n$. Jest oczywiste, że zmienna losowa M_n jest $\mathcal{F}_n$-mierzalna, ponadto

$$M_{n+1} - M_n = U_{n+1} - U_n + A_{n+1} - A_n = U_{n+1} - \mathcal{E}\,(U_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)\,,$$

i po wzięciu warunkowej wartości oczekiwanej obu stron widać, że (M_n) jest martyngałem:

$$\mathcal{E}\,(M_{n+1} - M_n \mid \mathcal{F}_n) = \mathcal{E}\,(U_{n+1} - \mathcal{E}\,(U_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \mid \mathcal{F}_n) = 0. \ \blacksquare$$

Pozostała do wykazania jednoznaczność. Niech (M'_n), (A'_n) stanowią inną parę procesów spełniających warunki z tw. 1. Wtedy $M_n - A_n = M'_n - A'_n$, $n \geqslant 0$, i gdy $X_n = M_n - M'_n$, to

$$X_n = M_n - M'_n = A_n - A'_n, \quad n \geqslant 0.$$

Z pierwszej równości wynika, że proces (X_n) jest martyngałem, z drugiej — że jest prognozowalny, co daje kolejno równości poniżej:

$$X_n = \mathcal{E}\,(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = X_{n+1}, \quad n \geqslant 0,$$

a ponieważ $X_0 = 0$, to $X_n = 0$ dla $n = 1, 2, \ldots$, czyli $M_n = M'_n$ oraz $A_n = A'_n$. ■

Niech teraz $(U_n)_{n=0}^{\infty}$ będzie podmartyngałem. Z poprzedniego twierdzenia zastosowanego do nadmartyngału $(-U_n)_{n=0}^{\infty}$ otrzymujemy natychmiast

Wniosek 2. *Każdy podmartyngał $(U_n)_{n=0}^{\infty}$ ma dokładnie jedno przedstawienie $U_n = M_n + A_n$, gdzie $(M_n)_{n=0}^{\infty}$ jest martyngałem, zaś $(A_n)_{n=0}^{\infty}$ niemalejącym ciągiem prognozowalnym, takim, że $A_0 = 0$.*

Uwaga 3. Dowolny ciąg (X_n) adaptowanych i całkowalnych zmiennych losowych można przedstawić w postaci $X_n = M_n + A_n$, gdzie (M_n) jest martyngałem, zaś (A_n) — procesem prognozowalnym, niekoniecznie rosnącym. Widać to z dowodu tw. 1. Dopiero założenie, że (X_n) jest nadmartyngałem lub podmartyngałem, zapewnia monotoniczność procesu (A_n).

Uwaga 4. Proces $(A_n)_{n=0}^{\infty}$ jest niemalejący, więc ma granicę w szerszym sensie, czyli istnieje $A_\infty = \lim_{n\to\infty} A_n$. Jest to na ogół niewłaściwa zmienna losowa, bowiem może przyjmować wartość ∞.

Proces $(A_n)_{n=0}^{\infty}$ nazywamy kompensatorem procesu $(U_n)_{n=0}^{\infty}$, gdyż kompensuje on $(U_n)_{n=0}^{\infty}$ do martyngału.

Rozkład Dooba odgrywa szczególną rolę przy badaniu martyngałów (X_n) całkowalnych z kwadratem (takich, że $\mathcal{E}X_n^2 < \infty$, $n = 0, 1, 2, \ldots$). Wtedy ciąg (X_n^2) jest podmartyngałem i na mocy wniosku 2 ma rozkład Dooba: $X_n^2 = M_n + A_n$. Niemalejący proces A oznaczamy przez $\langle X \rangle$ i nazywamy potocznie nawiasem skośnym martyngału X. Wiele własności martyngału (X_n) da się zbadać za pomocą nawiasu skośnego $\langle X \rangle$, co zobaczymy na kilku przykładach.

Zaczniemy od najprostszych:

Stwierdzenie 5. *Niech $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ będzie martyngałem. Wtedy*

(*a*) *Jeśli dla pewnego $p > 1$ w rozkładzie Dooba $|X_n|^p = M_n + A_n$ mamy $\mathcal{E}A_\infty < \infty$, to ciąg (X_n) jest zbieżny w L^p.*

(*b*) (X_n) *jest ograniczony w* L^2 (*czyli* $\sup_n X_n^2 < \infty$) *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\mathcal{E}\langle X\rangle_\infty < \infty$.

D o w ó d. (*a*) wynika z tw. 11.5.6, bowiem

$$\mathcal{E}|X_n|^p = \mathcal{E}M_n + \mathcal{E}A_n = \mathcal{E}M_0 + \mathcal{E}A_n,$$

i dalej:

$$\sup_n \mathcal{E}|X_n|^p = \mathcal{E}M_0 + \sup_n \mathcal{E}A_n \leqslant \mathcal{E}M_0 + \mathcal{E}A_\infty < \infty.$$

(*b*). Konieczność: wynika z (*a*) dla $p = 2$. Dostateczność:

$$\mathcal{E}\langle X\rangle_\infty = \sup_n \mathcal{E}\langle X\rangle_n = \sup_n \mathcal{E}\left(X_n^2 - X_0^2\right) < \infty.$$

Otrzymamy teraz pewną pożyteczną reprezentację nawiasu skośnego. Ponieważ (X_n) jest martyngałem, to dla $k \geqslant l$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}\left((X_k - X_l)^2 \mid \mathcal{F}_l\right) &= \mathcal{E}\left(X_k^2 - 2X_kX_l + X_l^2 \mid \mathcal{F}_l\right) = \\
&= \mathcal{E}\left(X_k^2 \mid \mathcal{F}_l\right) - 2X_l\mathcal{E}\left(X_k \mid \mathcal{F}_l\right) + X_l^2 = \\
&= \mathcal{E}\left(X_k^2 - X_l^2 \mid \mathcal{F}_l\right) = \\
&= \mathcal{E}\left(M_k + \langle X\rangle_k - M_l - \langle X\rangle_l \mid \mathcal{F}_l\right) = \\
&= \mathcal{E}\left(\langle X\rangle_k - \langle X\rangle_l \mid \mathcal{F}_l\right).
\end{aligned}$$

Oznaczając $\Delta X_k = X_k - X_{k-1}$ i kładąc $l = k-1$ otrzymujemy stąd

$$\mathcal{E}\left((\Delta X_k)^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}\right) = \langle X\rangle_k - \langle X\rangle_{k-1},$$

a to daje

$$\langle X\rangle_n = \sum_{j=1}^n \mathcal{E}\left((\Delta X_j)^2 \mid \mathcal{F}_{j-1}\right). \tag{2}$$

Przykład 6. Jeśli $\xi_1, \xi_2, \ldots$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych, $\mathcal{E}\xi_i = 0$, $\mathcal{E}\xi_i^2 < \infty$, $i = 1, 2, \ldots$, $X_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, $X_0 = 0$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ dla $n \geqslant 1$, to ciąg $(X_n^2, \mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$ jest podmartyngałem i

$$\langle X\rangle_n = \sum_{j=1}^n \mathcal{E}\left(\xi_j^2 \mid \mathcal{F}_{j-1}\right) = \sum_{j=1}^n \mathcal{D}^2\xi_j,$$

zatem nawias skośny jest procesem deterministycznym (nielosowym). ■

Wiadomo (tw. 7.3.2), że zbieżność szeregu $\sum_{j=1}^\infty \mathcal{D}^2\xi_j$ pociąga za sobą zbieżność p.n. szeregu $\sum_{j=1}^\infty \xi_j$. Jeśli ponadto $|\xi_i| \leqslant C$ p.n. dla $i = 1, 2, \ldots$, to zachodzi również wynikanie odwrotne.

Ostatnią uwagę można uogólnić (patrz tw. 8). Przedtem udowodnimy

Twierdzenie 7. *Niech* (X_n) *będzie nieujemnym podmartyngałem,* $X_0 = 0$*, i niech* $X_n = M_n + A_n$ *będzie jego rozkladem Dooba. Wtedy*

$$\{A_\infty < \infty\} \subset \{(X_n) \text{ zbieżny p.n.}\} \subset \{\sup_n X_n < \infty\}.$$

„Zbieżny p.n." oznacza dokładniej „zbieżny p.n. do granicy skończonej". Taką umowę przyjmujemy też dalej.

Dowód. Prawa inkluzja jest oczywista, dowodzimy lewą. Niech $a > 0$ i $\tau_a = \inf\{n \geqslant 1 \colon A_{n+1} > a\}$. Jest to moment stopu (który może przyjmować wartość ∞, bowiem $\inf \emptyset = \infty$), co wynika z prognozowalności A.

Z twierdzenia Dooba 11.2.8 zastosowanego do martyngału M $(M_0 = 0)$ i z definicji τ_a wynika, że

$$\mathcal{E} X_{n\wedge\tau_a} = \mathcal{E} M_{n\wedge\tau_a} + \mathcal{E} A_{n\wedge\tau_a} = 0 + \mathcal{E} A_{n\wedge\tau_a} \leqslant \mathcal{E} A_{\tau_a} \leqslant a.$$

Niech $Y_n^a = X_{n\wedge\tau_a}$. Jest to na mocy twierdzenia Dooba (nieujemny) podmartyngał, ponadto $\sup_n \mathcal{E} Y_n^a \leqslant a < \infty$, więc na mocy twierdzenia o zbieżności podmartyngałów (Y_n^a) jest zbieżny p.n. Dlatego

$$\{A_\infty \leqslant a\} = \{\tau_a = \infty\} \subset \{(X_n) \text{ zbieżny p.n.}\},$$

ponieważ na zbiorze $\{\tau_a = \infty\}$ jest $X_n = X_{n\wedge\infty} = Y_n^a$. Stąd

$$\{A_\infty < \infty\} = \bigcup_{a=1}^{\infty} \{A_\infty \leqslant a\} = \bigcup_{a=1}^{\infty} \{\tau_a = \infty\} \subset \{(X_n) \text{ zbieżny p.n.}\},$$

co kończy dowód. ■

Twierdzenie 8. *Niech* (X_n) *będzie martyngałem całkowalnym z kwadratem. Wtedy*

(*a*) $\{\langle X\rangle_\infty < \infty\} \subset \{(X_n) \text{ zbieżny p.n.}\}$.

(*b*) *Jeśli ponadto* (X_n) *ma przyrosty wspólnie ograniczone, tj.* $|\Delta X_n| \leqslant K$ *p.n. dla* $n = 1, 2, \ldots$*, to* $\langle X\rangle_\infty(\omega) < \infty$ *p.n. na zbiorze*

$$\{(X_n) \text{ zbieżny p.n.}\}.$$

Dowód. (*a*). Proces (X_n^2) jest nieujemnym podmartyngałem, więc z tw. 7 wynika, że

$$\{\langle X\rangle_\infty < \infty\} \subset \{(X_n^2) \text{ zbieżny p.n.}\}.$$

Proces $(X_n+1)^2$ jest także nieujemnym podmartyngałem i $\langle X+1\rangle_n = \langle X\rangle_n$ (por. (2)). Dlatego

$$\begin{aligned}\{\langle X\rangle_\infty < \infty\} \subset \{(X_n^2) \text{ zbieżny p.n.}\} \cap \{((X_n+1)^2) \text{ zbieżny p.n.}\} = \\ = \{(X_n) \text{ zbieżny p.n.}\}.\end{aligned}$$

(b). Zdefiniujemy moment stopu $\gamma_c = \inf\{n: |X_n| > c\}$. Wtedy

$$\mathcal{E}\left(X^2_{n\wedge\gamma_c} - \langle X\rangle_{n\wedge\gamma_c}\right) = 0.$$

Ponieważ

$$|X^{\gamma_c}_n| \leqslant |X^{\gamma_c}_{n-1}| + |X^{\gamma_c}_n - X^{\gamma_c}_{n-1}| \leqslant c + K,$$

to

$$\mathcal{E}\langle X\rangle_{n\wedge\gamma_c} = \mathcal{E}X^2_{n\wedge\gamma_c} \leqslant (c+K)^2. \tag{3}$$

Gdyby teraz $P(\langle X\rangle_\infty = \infty, \sup_n |X_n| < \infty) > 0$, to istniałaby taka stała $c > 0$, że $P(\gamma_c = \infty, \langle X\rangle_\infty = \infty) > 0$, a to stoi w sprzeczności z (3). ■

Wniosek 9. *Jeśli $X_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, $\xi_n \geqslant 0$, $\mathcal{E}\xi_n < \infty$ dla $n = 1, 2, \ldots$, a ponadto ciąg (ξ_n) jest adaptowany do filtracji $(\mathcal{F}_n)$, to*

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}\left(\xi_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) < \infty\right\} \subset \{(X_n) \text{ zbieżny p.n.}\}.$$

D o w ó d. Wystarczy zastosować tw. 7 do nieujemnego podmartyngału (X_n) i zauważyć, że (patrz dowód tw. 1):

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{E}\left(\xi_{k+1} \mid \mathcal{F}_k\right). \; ■$$

Uwaga 10. Wniosek 9 jest warunkową wersją pierwszej części lematu Borela-Cantelliego. Żeby to zobaczyć, wystarczy wziąć $\xi_n = \mathbf{1}_{B_n}$, gdzie (B_n) jest ciągiem zdarzeń.

§ F.2. Zagadnienie optymalnego stopowania

Przedstawimy zagadnienie optymalnego stopowania w najprostszej sytuacji. W pewnej grze w kolejnych chwilach $t = 0, 1, 2, \ldots, T$ wypłaca się kwotę Z_t, która jest nieujemną wielkością losową. Gracz może w każdej chwili t wycofać się z gry, inkasując kwotę Z_t, może też odrzucić tę propozycję i czekać na lepszy kąsek. Decyzję podejmuje na podstawie dotychczasowego przebiegu gry.

Jaką strategię powinien przyjąć gracz, by zoptymalizować swoją wypłatę?

Jeśli przez $(\mathcal{F}_t)$ oznaczymy σ-ciało zdarzeń, które możemy zaobserwować do chwili t, to ciąg $(\mathcal{F}_t)_{t\leqslant T}$ jest filtracją, a proces $(Z_t)_{t\leqslant T}$ jest adaptowany do tej filtracji. Strategia, czyli moment wycofania się z gry, jest zmienną losową τ, przy czym $\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$, bowiem zdarzenie to powinno zależeć tylko od obserwacji procesu (Z_t) do chwili t. Krótko mówiąc, τ powinna być momentem stopu względem filtracji $(\mathcal{F}_t)$; odwrotnie, każdy taki moment stopu jest dającą się zrealizować strategią.

Podsumowując: $Z_0, Z_1, Z_2, \ldots, Z_T$ jest ciągiem kolejnych wypłat w pewnej grze, w chwilach 0, 1, 2,... T. Zakładamy, że ciąg $(Z_t)_{t \leqslant T}$ jest adaptowany do pewnej filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t \leqslant T}$, przy czym $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Ponadto zakładamy, że $Z_t \geqslant 0$ dla $t = 0, 1, 2, \ldots, T$.

Sprecyzujemy jeszcze cel gracza: chce on wycofać się z gry w takiej chwili, by jego *średnia* wypłata była jak największa. Stąd następująca definicja.

Definicja 1. *Moment stopu ν nazywamy optymalnym dla ciągu $(Z_t)_{t \leqslant T}$, gdy*

$$\mathcal{E} Z_\nu = \sup_{\tau \in \Theta} \mathcal{E} Z_\tau,$$

gdzie Θ jest zbiorem momentów stopu o wartościach w zbiorze $\{0, 1, \ldots, T\}$.

Naszym celem jest podanie reguł pozwalających znajdować momenty optymalne. Wprowadzimy pomocniczy proces — obwiednię Snella (U_t) ciągu $(Z_t)_{t \leqslant T}$, zdefiniowaną w następujący sposób:

$$\begin{aligned} U_t &= \max(Z_t, \mathcal{E}\,(U_{t+1} \mid \mathcal{F}_t)), \quad t \leqslant T-1, \\ U_T &= Z_T. \end{aligned}$$

Z definicji widać, że $Z_t \leqslant U_t$ dla $0 \leqslant t \leqslant T$, czyli (U_t) dominuje (Z_t).

Stwierdzenie 2. *Obwiednia Snella (U_t) jest nadmartyngałem. Jest to najmniejszy nadmartyngał dominujący wyjściowy ciąg (Z_t), czyli gdy (X_t) jest nadmartyngałem i $X_t \geqslant Z_t$ dla $0 \leqslant t \leqslant T$, to również $X_t \geqslant U_t$ dla $0 \leqslant t \leqslant T$.*

D o w ó d. Oczywiście $U_t \geqslant Z_t$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Sprawdzimy, że (U_t) jest nadmartyngałem. Istotnie, mamy

$$U_{t-1} = \max(Z_{t-1}, \mathcal{E}\,(U_t \mid \mathcal{F}_{t-1})) \geqslant \mathcal{E}\,(U_t \mid \mathcal{F}_{t-1}).$$

Pozostaje wykazać, że (U_t) jest najmniejszym nadmartyngałem dominującym (Z_t). Niech zatem (I_t) będzie innym nadmartyngałem o tej własności. Wtedy $I_T \geqslant Z_T = U_T$, a gdy $I_t \geqslant U_t$, to

$$I_{t-1} \geqslant \mathcal{E}\,(I_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) \geqslant \mathcal{E}\,(U_t \mid \mathcal{F}_{t-1}),$$

wobec tego

$$I_{t-1} \geqslant \max(Z_{t-1}, \mathcal{E}\,(U_t \mid \mathcal{F}_{t-1})) = U_{t-1},$$

gdzie równość wynika z definicji U_{t-1}.

Indukcja wsteczna pokazuje teraz, że dla każdego $t \in \{1, \ldots T\}$ zachodzi nierówność $I_t \geqslant U_t$, więc (U_t) jest najmniejszym nadmartyngałem dominującym (Z_t). ■

Twierdzenie 3. $\nu_0 = \min\{t \geqslant 0\colon U_t = Z_t\}$ *jest optymalnym momentem stopu, czyli*

$$U_0 = \mathcal{E} Z_{\nu_0} = \sup_{\tau\in\Theta} \mathcal{E} Z_\tau.$$

D o w ó d. Zdarzenie $\{\nu_0 \geqslant j\} = \{\nu_0 \leqslant j-1\}' \in \mathcal{F}_{j-1}$, oraz

$$\begin{aligned}\mathcal{E}\left(\mathbf{1}_{\{\nu_0\geqslant j\}}(U_j^{\nu_0} - U_{j-1}^{\nu_0}) \,\middle|\, \mathcal{F}_{j-1}\right) &= \mathcal{E}\left(\mathbf{1}_{\{\nu_0\geqslant j\}}(U_j - \mathcal{E}\,(U_j \mid \mathcal{F}_{j-1}) \,\middle|\, \mathcal{F}_{j-1}\right) = \\ &= \mathbf{1}_{\{\nu_0\geqslant j\}}\mathcal{E}\,((U_j - \mathcal{E}\,(U_j \mid \mathcal{F}_{j-1}) \mid \mathcal{F}_{j-1}) = 0,\end{aligned}$$

tak więc ciąg o wyrazach

$$U_t^{\nu_0} = U_{t\wedge\nu_0} = U_0 + \sum_{j=1}^{t} \mathbf{1}_{\{\nu_0\geqslant j\}}(U_j^{\nu_0} - U_{j-1}^{\nu_0})$$

jest martyngałem. Ponieważ moment stopu $\nu_0 \leqslant T$, więc

$$U_0 = U_0^{\nu_0} = \mathcal{E} U_T^{\nu_0} = \mathcal{E} U_{\nu_0} = \mathcal{E} Z_{\nu_0}.$$

Jeśli teraz weźmiemy dowolny moment stopu $\nu \in \Theta$, to ciąg (U_n^ν) jest nadmartyngałem i

$$U_0 \geqslant \mathcal{E} U_\nu \geqslant \mathcal{E} Z_\nu. \ \blacksquare$$

Wbrew pozorom, metodę otrzymywania optymalnego momentu stopu za pomocą obwiedni Snella można postarać się zrozumieć intuicyjnie. W tym celu rozpatrzmy (kompletnie bezsensowną dla obu stron) grę, w której wypłaty są nielosowe: zmienne losowe Z_t są stałymi z_t. Wtedy obwiednia Snella jest najmniejszym ciągiem nierosnącym (u_t) dominującym ciąg (z_t), a optymalny moment stopu z twierdzenia 3 jest takim (nielosowym) wskaźnikiem ν, dla którego $u_0 = z_\nu = \max_{t\leqslant T} z_t$.

Podamy teraz charakteryzację momentów optymalnych. Widać z niej, że ν_0 jest minimalnym momentem optymalnym.

Twierdzenie 4. *Moment stopu ν jest optymalny dla ciągu (Z_t) wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są dwa warunki:*

(*i*) $Z_\nu = U_\nu$;

(*ii*) *ciąg* $(U_t^\nu)_{t\leqslant T}$ *jest martyngałem.*

D o w ó d. $\Rightarrow$ Jeśli ν jest optymalny, to $\mathcal{E} Z_\nu = U_0$, a ponieważ $(U_t^\nu)_{t\leqslant T}$ jest nadmartyngałem i U dominuje Z, to

$$\mathcal{E} U_\nu \leqslant U_0 = \mathcal{E} Z_\nu \leqslant \mathcal{E} U_\nu,$$

czyli $\mathcal{E}U_\nu = \mathcal{E}Z_\nu$, co daje $Z_\nu = U_\nu$ (z dominacji wiemy już, że $Z_\nu \leqslant U_\nu$). Udowodniliśmy (i).

Żeby udowodnić (ii), skorzystamy z tego, że $(U_t^\nu)_{t\leqslant T}$ jest nadmartyngałem. Mamy kolejno

$$U_{\nu\wedge t} \geqslant \mathcal{E}\left(U_{\nu\wedge T} \mid \mathcal{F}_t\right) = \mathcal{E}\left(U_\nu \mid \mathcal{F}_t\right), \tag{1}$$

i

$$\mathcal{E}U_\nu = U_0 \geqslant \mathcal{E}U_{\nu\wedge t} \geqslant \mathcal{E}U_\nu,$$

stąd

$$\mathcal{E}U_{\nu\wedge t} = \mathcal{E}U_\nu = \mathcal{E}\left(\mathcal{E}\left(U_\nu \mid \mathcal{F}_t\right)\right),$$

co razem z (1) daje $U_{\nu\wedge t} = \mathcal{E}\left(U_\nu \mid \mathcal{F}_t\right)$, więc ciąg $(U_{\nu\wedge t})_{t\leqslant T}$ jest martyngałem, co kończy dowód (ii).

$\Leftarrow$ Z (ii) i (i) mamy kolejno $U_0 = \mathcal{E}U_\nu = \mathcal{E}Z_\nu$. Dla dowolnego momentu stopu $\tau \in \Theta$ ciąg $(U_n^\tau)_n$ jest nadmartyngałem, więc

$$U_0 \geqslant \mathcal{E}U_\tau \geqslant \mathcal{E}Z_\tau;$$

ostatnia nierówność wynika z tego, że U dominuje Z. Zatem

$$\mathcal{E}Z_\nu = U_0 = \sup_{\tau\in\Theta} \mathcal{E}Z_\tau. \ \blacksquare$$

Przykład 5. Na pewien egzamin, do którego przystępuje n studentów, przygotowano n zestawów pytań. Wchodzący losuje jeden zestaw, który nie jest już wykorzystywany powtórnie. Paweł nauczył się odpowiedzi na k zestawów i teraz obserwuje, które zestawy już się pojawiły, by zdecydować, kiedy wejść na egzamin. Jaką powinien wybrać strategię, by zmaksymalizować *średnią* szansę zdania egzaminu?

Zdarzeniami elementarnymi są ciągi zero-jedynkowe $\omega = (a_1, \ldots, a_n)$, gdzie $\sum_{i=1}^n a_i = k$, przy czym $a_i = 1$, gdy Paweł zna odpowiedź na i-te pytanie. Zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne. Niech $X_i(\omega) = a_i$, $i = 1, 2, \ldots n$. Obserwując egzamin do chwili l Paweł zna $X_1, X_2, \ldots, X_l$ i na podstawie tej wiedzy decyduje, czy w następnej chwili ma się wycofać — czyli zakończyć grę wchodząc na egzamin. Innymi słowy, chwila wycofania się jest momentem stopu względem filtracji $(\mathcal{F}_i)$, gdzie $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_i = \sigma(X_1, \ldots, X_i)$, $i = 1, 2, \ldots n$.

Jeśli przez Y_l oznaczymy szansę zdania egzaminu przy wejściu w chwili $l+1$, $l = 0, 1, \ldots, n-1$, to zadanie Pawła sprowadzi się do optymalnego zastopowania ciągu $Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}$. Jest oczywiste, że $Y_0 = k/n$ i

$$Y_l = \frac{k - \sum_{i=1}^l X_i}{n-l}, \quad l = 1, \ldots n-1.$$

Wyznaczymy obwiednię Snella (U_i) ciągu (Y_i). Jak zwykle, $U_{n-1} = Y_{n-1}$, $U_{n-2} = \max(Y_{n-2}, \mathcal{E}(Y_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-2}))$. Zachodzi równość:

$$\mathcal{E}(Y_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-2}) = \mathcal{E}\left(\frac{k-(X_1+\ldots+X_{n-1})}{n-(n-1)} \,\middle|\, \mathcal{F}_{n-2}\right) =$$
$$= k-(X_1+\ldots+X_{n-2}) - \mathcal{E}(X_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-2}).$$

Żeby wyznaczyć ostatnie wyrażenie, obliczymy (nieco ogólniej) $\mathcal{E}(X_{l+1} \mid \mathcal{F}_l)$ dla $l = 0, 1, \ldots n-1$. Ponieważ σ-ciało $\mathcal{F}_l$ jest skończone, zatem generowane przez atomy, dla $\omega \in \{X_1 = a_1, \ldots, X_l = a_l\} = A$, oznaczając $j = \sum_{i=1}^{l} a_i$, mamy

$$\mathcal{E}(X_{l+1} \mid \mathcal{F}_l)(\omega) = \frac{1}{P(A)} \int_A X_{l+1} dP = \frac{P(A \cap \{X_{l+1} = 1\})}{P(A)} =$$
$$= \frac{\binom{n-(l+1)}{k-(j+1)}}{\binom{n-l}{k-j}} = \frac{k-j}{n-l} = \frac{k-(X_1+\ldots+X_l)}{n-l} = Y_l.$$

Stąd

$$\mathcal{E}(Y_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-2}) = k-(X_1+\ldots+X_{n-2}) - \frac{k-(X_1+\ldots+X_{n-2})}{2} = Y_{n-2}.$$

W takim razie $U_{n-2} = Y_{n-2}$.
Można podejrzewać, że ciąg (Y_i) jest martyngałem i w konsekwencji $U_i = Y_i$ dla $i = 0, \ldots, n$. Istotnie,

$$\mathcal{E}(Y_{l+1} \mid \mathcal{F}_l) = \mathcal{E}\left(\frac{k-(X_1+\ldots+X_{l+1}}{n-l} \,\middle|\, \mathcal{F}_l\right) =$$
$$= \frac{k-(X_1+\ldots+X_l)}{n-(l+1)} - \frac{1}{n-(l+1)} Y_l =$$
$$= Y_l \left(\frac{n-l}{n-(l+1)} - \frac{1}{n-(l+1)}\right) = Y_l.$$

Z twierdzenia Dooba wynika więc, że dla każdego momentu stopu τ jest

$$\mathcal{E} Y_\tau = Y_0 = \frac{k}{n},$$

zatem każda reguła stopu jest jednakowo dobra. ■

§ F.3. Opcje amerykańskie

Rozważmy rynek finansowy opisany w § 11.8. Istnieją na nim także opcje typu amerykańskiego, czyli takie, które można realizować w dowolnej chwili $t \in \{0, 1, \ldots, T\}$. Oznaczmy przez Z_t zysk z realizacji opcji w chwili t.

Wtedy możemy utożsamić opcję z ciągiem $(Z_t)_{t\leqslant T}$ nieujemnych zmiennych losowych, adaptowanym do filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\leqslant T}$. Przykładami mogą być amerykańskie opcje kupna (sprzedaży) z ceną wykonania K na akcje o cenie opisanej przez proces S: $Z_t = (S_t - K)^+$ (odp. $Z_t = (K - S_t)^+$).

Podamy sposób wyceny takiej opcji. Ograniczymy się do opisanego w § 11.8 modelu Coxa–Rossa–Rubinsteina (CRR), choć idea przenosi się na przypadek ogólny.

Przedtem kilka słów o tym, ile powinna w chwili t kosztować wypłata X, która nastąpi w momencie T. W tw. 11.8.2 wykazaliśmy, że wypłata X jest replikowana za pomocą jednoznacznie określonego portfela, i gdy V_t jest procesem wartości tego portfela, to $W_t = V_t/B_t$ jest martyngałem względem miary P (zwanej miarą martyngałową), a $W_0 = V_0$ jest ceną w chwili 0 za wypłatę X w chwili T. Zatem wypłata X jest w chwili t warta

$B_t = (1+r)^t$

$$V_t = B_t \mathcal{E}\left(\frac{X}{B_T} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right),$$

bowiem

$$\frac{V_t}{B_t} = W_t = \mathcal{E}\left(W_T \mid \mathcal{F}_t\right) = \mathcal{E}\left(\frac{V_T}{B_T} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right) = \mathcal{E}\left(\frac{X}{B_T} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right).$$

Wracamy teraz do kwestii wyceny opcji amerykańskich. W chwili T jej wartością jest $U_T = Z_T$. W chwili $T-1$ wystawca opcji musi mieć tyle, by zabezpieczyć wypłatę Z_{T-1} w momencie $T-1$ lub Z_T w momencie T. Ta ostatnia wypłata jest w chwili $T-1$ warta

$$B_{T-1}\mathcal{E}\left(\frac{Z_T}{B_T} \,\middle|\, \mathcal{F}_{T-1}\right).$$

Tyle trzeba mieć, by zabezpieczyć wypłatę Z_T w chwili T. Dlatego cena opcji amerykańskiej w chwili $T-1$ jest równa

$$U_{T-1} = \max\left(Z_{T-1}, B_{T-1}\mathcal{E}\left(\frac{Z_T}{B_T} \,\middle|\, \mathcal{F}_{T-1}\right)\right).$$

Cenę opcji dla $t = 1, 2, \ldots, T$ definiujemy indukcyjnie wzorem

$$U_{t-1} = \max\left(Z_{t-1}, B_{t-1}\mathcal{E}\left(\frac{U_t}{B_t} \,\middle|\, \mathcal{F}_{t-1}\right)\right).$$

Dzieląc obie strony przez B_{t-1} i oznaczając $U_t^* = U_t/B_t$, $Z_t^* = Z_t/B_t$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} U_{t-1}^* &= \max(Z_{t-1}, \mathcal{E}\left(U_t^* \mid \mathcal{F}_{t-1}\right)), \quad t \leqslant T; \\ U_T^* &= Z_T^*. \end{aligned}$$

Okazało się, że ciąg zdyskontowanych cen opcji amerykańskich (U_t^*) jest obwiednią Snella ciągu Z_t^* zdyskontowanych wypłat, czyli (U_t^*) jest najmniejszym nadmartyngałem dominującym (Z_t^*). Wobec tego otrzymujemy jako wniosek z wyników § E.2

Twierdzenie 1. *Cena opcji amerykańskiej w chwili* 0 *jest równa*

$$U_0 = U_0^* = \sup_{\tau\in\Theta} \mathcal{E} Z_\tau^*,$$

a ponadto $U_0 = \mathcal{E} Z_\nu$, *gdzie* $\nu = \min\{t: U_t = Z_t\}$.

Jak wystawca opcji powinien zabezpieczyć wypłatę? Ponieważ U^* jest nadmartyngałem, to ma rozkład Dooba $U_t^* = M_t - A_t$. Istnieje taki portfel Φ, że $V_T = V_T(\Phi) = B_T M_T$ (tw. 11.8.2). Z kolei ciąg o wyrazach $W_t = V_t/B_t$ jest martyngałem, więc

$$W_t = \mathcal{E}\left(W_T \mid \mathcal{F}_t\right) = \mathcal{E}\left(M_T \mid \mathcal{F}_t\right) = M_t.$$

Zatem $U_t^* = W_t - A_t$, tzn. $U_t = V_t - A_t B_t$.

Dlatego wystawca opcji może zabezpieczyć się w sposób doskonały: gdy otrzyma zapłatę $U_0 = V_0(\Phi)$, to za pomocą portfela Φ generuje bogactwo $V_t = V_t(\Phi)$, które w chwili t jest nie mniejsze niż U_t, zatem nie mniejsze niż Z_t.

Kiedy zrealizować opcję?

A. *Z punktu widzenia nabywcy* nie ma sensu realizacja w chwili t, jeśli $U_t > Z_t$, bo za walor wart U_t otrzymamy tylko Z_t; lepiej wtedy sprzedać opcję za U_t na rynku. Optymalny moment realizacji τ spełnia równanie $U_\tau = Z_\tau$ (ponieważ $U_t \geqslant Z_t$ i $U_T = Z_T$), więc $U_\tau^* = Z_\tau^*$.

Nie ma też sensu realizacja opcji po chwili

$$\nu = \min\{j: A_{j+1} \neq 0\},$$

bowiem sprzedaż w chwili ν daje $U_\nu = V_\nu(\Phi)$ i gdy od tej chwili korzystamy z portfela Φ, to mamy więcej niż wartość opcji w chwilach $\nu+1, \ldots, T$, jako że $U_t = V_t(\Phi) - A_t B_t$ i $A_t > 0$ dla $t > \nu$.

Zatem $\tau \leqslant \nu$, co pozwala stwierdzić, że $U^{*\tau}$ jest martyngałem:

$$U_{\tau\wedge n}^* = M_{\tau\wedge n} - A_{\tau\wedge n} = M_{\tau\wedge n},$$

ponieważ $\tau \wedge n \leqslant \nu$ i w efekcie $A_{\tau\wedge n} = 0$.

Podsumowując, najlepszy moment realizacji opcji jest optymalnym momentem stopu dla ciągu zdyskontowanych wypłat (Z_t^*), bowiem spełnione są warunki (i) i (ii) twierdzenia F.2.4.

B. *Z punktu widzenia wystawcy opcji*: wystawca korzysta z portfela Φ, a jeśli nabywca opcji zrealizuje ją w momencie τ innym niż optymalny, to $U_\tau^* > Z_\tau^*$ lub $A_\tau > 0$ (jeśli $A_\tau = 0$, to $(U_{\tau\wedge t}^*)$ jest martyngałem; jeśli ponadto $U_\tau^* = Z_\tau^*$, to τ jest momentem optymalnym). Zatem w innym, nieoptymalnym momencie τ wystawca opcji ma dodatni zysk

$$V_\tau(\Phi) - Z_\tau = (U_\tau + A_\tau B_\tau) - Z_\tau = B_\tau(U_\tau^* - Z_\tau^*) + A_\tau B_\tau > 0,$$

bo składniki sumy po prawej stronie są nieujemne, i przynajmniej jeden z nich jest dodatni.

Stwierdzenie 2. *Niech (C_t) będzie procesem wartości opcji amerykańskiej opisanej przez ciąg adaptowany $(Z_t)_{t\leqslant T}$, a (c_t) — opcji europejskiej, zdefiniowanej przez zmienną losową $h = Z_T$. Wtedy $C_t \geqslant c_t$.*

Ponadto, jeśli $c_t \geqslant Z_t$ dla każdego $t \in \{0, 1, \ldots, T\}$, to $c_t = C_t$ dla każdego $t \in \{0, 1, \ldots, T\}$.

Uwaga 3. Nierówności $C_t \geqslant c_t$ należało się spodziewać, bowiem opcje amerykańskie dają posiadaczowi więcej praw niż europejskie.

D o w ó d. Ponieważ C_t^* jest nadmartyngałem względem miary martyngałowej P i $C_T = Z_T = c_T$, to

$$C_t^* \geqslant \mathcal{E}\left(C_T^* \mid \mathcal{F}_t\right) = \mathcal{E}\left(c_T^* \mid \mathcal{F}_t\right) = c_t^*.$$

Udowodniliśmy pierwszą część stwierdzenia. Jeśli teraz $c_t \geqslant Z_t$ dla każdego t, to $c_t^* \geqslant Z_t^*$, a ponieważ (c_t^*) jest martyngałem, więc tym bardziej nadmartyngałem, to $C_t^* \leqslant c_t^*$, bowiem C_t^* jest najmniejszym nadmartyngałem dominującym (Z_t^*). Stąd wynika równość $C_t^* = c_t^*$. ■

Przykład 4. Ceny opcji kupna europejskiej i amerykańskiej są równe.

Przypomnijmy, że $B_t = (1+r)^t$, $Z_t = (S_t - K)^+$. Oznaczmy przez c_t i odp. C_t ceny europejskiej i odp. amerykańskiej opcji kupna z terminem T i ceną wykonania K. Wtedy

$$\begin{aligned} c_t^* &= \frac{1}{(1+r)^T}\mathcal{E}\left((S_T - K)^+ \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right) \geqslant \\ &\geqslant \mathcal{E}\left(S_T^* - K(1+r)^{-T} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right) = S_t^* - K(1+r)^{-T}. \end{aligned}$$

$x^+ \geqslant x$.

Ostatnia równość wynika z faktu, że (S_t^*) jest martyngałem. Stąd

$$c_t \geqslant S_t - K(1+r)^{-T+t} \geqslant S_t - K.$$

Ponieważ $c_t \geqslant 0$, mamy $c_t \geqslant (S_t - K)^+ = Z_t$ i ze stw. 1 wynika, że $c_t = C_t$. ■

W innych przypadkach (np. opcji sprzedaży, opcji kupna na aktywa przynoszące dywidendy) równość nie zachodzi.